数理解析研究所講究録
152巻 1972年 74-76

4次元多様体に関する例

東大　福原真二

数年前まで、4次元多様体のトポロジーに関して、知られていたことといえば、おそらく、Milnorの単連結4次元閉多様体のホモトピー型の分類定理、Wallのh-cobordismに関する結果、Rohlinの定理位であった。

4次元でも、5次元以上で知られているのと類似の事実（一般ポアンカレ定理、differentiable Schönflies theorem、unknotting theorem、surgery理論 etc）が、成立するかどうか（という問題）は、きわめてむずかしいらしいことが最近ますますはっきりしてきた。トポロジーで未解決の問題のかなりの部分が、4次元のこれらの問題から発しているからである。しかも、高次元の類推が、そのまますんなりとは低次元、即ち3、4次元に適用されるわけにはいかないことが、Siebenmannその他の結果でわかってきた。

4次元の困難性の才一は、多様体Mが与えられたとき、その2次元ホモトピー群$\pi_2(M)$の元が、どういう場合にembeddingでとれるかということを決める方法（十分条件）がわかってないことにあるといわれている。その困難を、$S^2\times S^2$をいくつかconnected sumするという操作によって、さけ、modulo $S^2\times S^2$で、いろいろの結果をえたのが、

Shaneson-Cappel である。 彼らは、Wallが集大成した、5次元以上の surgery 理論を、modulo $S^2\times S^2$ という型で4次元において、formulate することに成功し、いくつかの基本的な定理と、応用を得ている。(Kirby 等によれば、これらは、まだまだ、4次元の本質的な部分からは程遠い段階だそうだが)

我々は、前に modulo $S^2\times S^2$ の議論を使って、ある $k\geq 0$ に対して、$S^1\times S^3 \# k(S^2\times S^2)$ の homotopy triangulation の、non-trivial element を作ったが、ここでは、4次元実射影空間 P^4 に関して、同様の例を考えてみる。

$f = z_0^3+z_1^2+z_2^2+z_3^2 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素多項式関数

S^7_ε を $\mathbb{C}^4$ 内の原点を中心とする十分小さい7次元球面とする。

$K^5 = S^7_\varepsilon \cap \{f=0\}$

$M^4 = K^5 \cap \{\text{Imaginary part of } z_3 = 0\}$

$T: K^5 \longrightarrow K^5$ を $T(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3)$

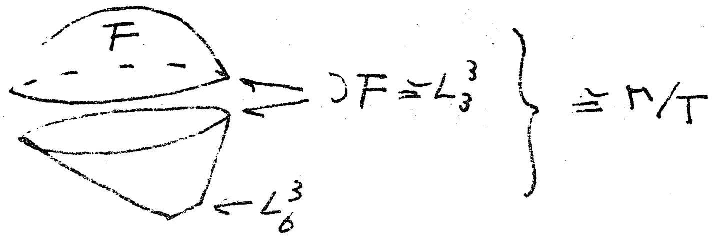
と定義する。Tは、K^5 の free involution で、

このときMは明らかにT-invariantである。Milnor fibering 等を考えることにより、Mは $S^2\times S^2 \# S^2\times S^2$ と diffeomorphic である。

$S^2\times S^2 \# S^2\times S^2$ の上の標準的な involution の orbit space

は、$P^4 \# S^2\times S^2$ であるが、M の T による orbit space M/T は $P^4\# S^2\times S^2$ に diffeomorphic でない（homeomorphic でさえない）ことが Medrano の結果を使うとわかる。

M/T が $P^4\# S^2\times S^2$ と同型なホモトピー群、ホモロジー群をもつことは、容易に確められるが、ホモトピー型が等しいかどうかは、まだはっきりしない。F を S^2 上の tangent D^2-bundle を二つ plumbing したものとするとき、∂F は lens space L_3^3 と diffeomorphic であるが、M/T は F と L_3^3 の natural な involution に関しての mapping cylinder を張り合せたものに等しいことがわかる。（下図）



M/T と $P^4\# S^2\times S^2$ の違いは、L_3^3 の張り合せのちがいに帰着されることが予想される。 （以上）